المحاضرة الثالثة

تذكرة

ليكن $f: A \to B$ تابعاً يقرن كل عنصر x من A بالعنصر $f(x)$ من B، عندئذٍ فإنّ:

يُسمّى التابع المعرّف على مجموعة جزئية من A ولتكن D، وله نفس قاعدة ربط f مقصور التابع f على D.
كما يُسمّى f ممدد لذلك التابع إلى A.

مثال: ليكن لدينا التابع $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ حيث $f(x) = x^2$.

إنّ التابع $g: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ حيث $g(x) = x^2$ هو مقصور للتابع f على المجموعة $D = \mathbb{R}^+$ لأنّه تابع منطلقه مجموعة جزئية من منطلق f وله نفس قاعدة ربط f. وإنّ f ممدد لـ g إلى $\mathbb{R}$.

خواص التابع الأسي العقدي:

1. التابع الأسي العقدي هو المدد التحليلي للتابع الأسي الحقيقي إلى المستوي العقدي حيث أن: $e^z|_{\mathbb{R}} = e^x$.
2. يحقّق التابع الأسي العقدي المساواة التالية:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}.e^{z_2} \; : \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

الإثبات: (هناك طريقتان للإثبات)

الطريقة الأولى: تمّ إثبات هذه المساواة في مقرر التحليل العقدي (1) باستخدام جداء كوشي لمتسلسلتين.

الطريقة الثانية: بالاستفادة من المبرهنة التالية:

إذا كان f قابلاً للاشتقاق على منطقة A (مفتوحة ومترابطة)، وكان $f'(z) = 0$ لأجل كل z من A، فإنّ $f(z) = c$ على A لأجل ثابت عقدي ما c.

ملاحظة: إذا كان المشتق لتابعٍ حقيقي معدوماً على مجالٍ مفتوح فإنّ هذا التابع سيكون ثابتاً على هذا المجال.

إثبات صحة المساواة:

لنأخذ التابع $f(z) = e^z.e^{a-z}$. نعلم أنّ التابع $e^{g(z)}$ يكون تحليلياً عندما يكون $g(z)$ تحليلياً، وبالتالي فإنّ f تحليلي على $\mathbb{C}$ (جداء لتابعين تحليليين) وإنّ:

$$f'(z) = e^z.e^{a-z} - e^z.e^{a-z} = 0 \quad : \forall z \in \mathbb{C}$$

وبما أنّ $\mathbb{C}$ منطقة فإنّ f ثابت على $\mathbb{C}$، أي أنّ $f(z) = c$ لأجل أي z من $\mathbb{C}$.

بما أنّ $f(0) = c$ و $f(0) = e^0.e^{a-0}$ فإن:

$$e^0.e^{a-0} = c \Longrightarrow e^a = c$$

بالنتيجة: $e^z.e^{a-z} = e^a$ ، وبأخذ $z = z_1$ و $a = z_1 + z_2$ في العلاقة السابقة نجد المساواة المطلوبة : $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}.e^{z_2}$.

الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للتابع الأسي العقدي e^z:

لإيجاد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للتابع الأسي العقدي:

لنضع $z = x + iy$ في صيغة التابع لنجد:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x . e^{iy}$$

لدينا:

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - \cdots$$

وكون المتسلسلة متقاربة بالإطلاق نستطيع كتابة المجموع السابق بالشكل :

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

بالنتيجة فإن:

$$e^z = e^x . e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

والجزء الحقيقي لـ e^z هو $u = e^x \cos y$، والجزء التخيلي هو $v = e^x \sin y$

تمرين:

أثبت أنّ التابع الأسي العقدي تحليلي على $\mathbb{C}$ باستخدام معادلتي كوشي-ريمان، وعين مشتقه.

الحل: وجدنا سابقا أنّ:

$$e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

ومنه فالجزء الحقيقي هو $u = e^x \cos y$، والجزء التخيلي هو $v = e^x \sin y$.

ومن الواضح أنّ هذين الجزأين الحقيقي قابلان للاشتقاق التام على $\mathbb{R}^2$ وأنهما يحققان شرطي كوشي-ريمان الآتيين:

$$u_x = e^x \cos y = v_y$$

$$u_y = -e^x \sin y = -v_x$$

على $\mathbb{R}^2$ أيضاً. ومنه فإنّ التابع الأسي العقدي تحليلي على $\mathbb{C}$. وإنّ مشتقه:

$$(e^z)' = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$$

3. طويلة التابع الأسي العقدي وزاويته:

من الواضح أنّ طويلة العدد العقدي e^z هي:

$$|e^z| = \sqrt{(e^x \cos y)^2 + (e^x \sin y)^2} = e^x = e^{Re\,(z)} > 0 \,:\, \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\Longrightarrow e^z \neq 0 \,:\, \forall z \in \mathbb{C}$$

وهذا يعني أنّ المعادلة $e^z = 0$ مستحيلة الحل.

أمّا زاوية التابع الأسي العقدي: $arg\, e^z = y$

مثال: $\left|e^{iz}\right| = \left|e^{i(x+iy)}\right| = e^{-y}$

"أي أنّ طويلة العدد العقدي e^{iz} هي e أس الجزء الحقيقي للأس"

4. التابع الأسي العقدي هو تابع دوري دوره الرئيسي $2\pi i$.

الإثبات:

لإثبات أنّ تابعاً عقدياً f دوري ودوره T، يكفي أن نثبت أنّ $f(z+T) = f(z)$ أياً كانت z من منطقة تعريفه.

لدينا $f(z) = e^z\,, T = 2\pi i$ ، لأنّ:

$$\begin{aligned} f(z+2\pi i) = e^{z+2\pi i} &= e^{x+i(y+2\pi)} = e^x(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)) \\ &= e^x(\cos y + i \sin y) = e^z = f(z) \end{aligned}$$

حل المعادلة الأسية $e^z = a$ حيث a ثابت عقدي:

نميّز الحالتين:

- $a = 0$ المعادلة مستحيلة الحل.
- $a \neq 0$ ، نكتبه بالشكل المثلثي (أو بالشكل الأسي)، أي: $a = |a|e^{iArg(a)}$، وعندئذٍ:

$$\begin{aligned} & e^z = a \\ \Leftrightarrow\ & e^x(\cos y + i\sin y) = |a|e^{iArg(a)} \\ \Leftrightarrow\ & e^x = |a| \ \ , y = Arg\,(a) + 2\pi k \ :\ k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow\ & x = ln|a| > 0\,, y_k = Arg\,(a) + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow\ & z_k = ln|a| + i(Arg\,(a) + 2\pi k\,) \ :\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

إذن يوجد عدد غير منتهٍ من الحلول.

مثال: حل المعادلة التالية $e^{iz} = -1 + i\sqrt{3}$.

وبالتالي

$$e^{i(x+iy)} = \Big[\underbrace{\left|-1+i\sqrt{3}\right|}_{\text{طويلة}}, \underbrace{Arg\left(-1+i\sqrt{3}\right)}_{\text{زاوية}}\Big]$$

$$e^{-y+ix} = \left[2, -\frac{\pi}{3} + \pi\right]$$

$$\Leftrightarrow [e^{-y}, x] = \left[2, -\frac{\pi}{3} + \pi\right]$$

$$\Leftrightarrow e^{-y} = 2\,, x_k = \frac{2}{3}\pi + 2\pi k \ : k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow z_k = x_k + iy = \frac{2}{3}\pi + 2\pi k + i(-\ln 2) : k \in \mathbb{Z}$$

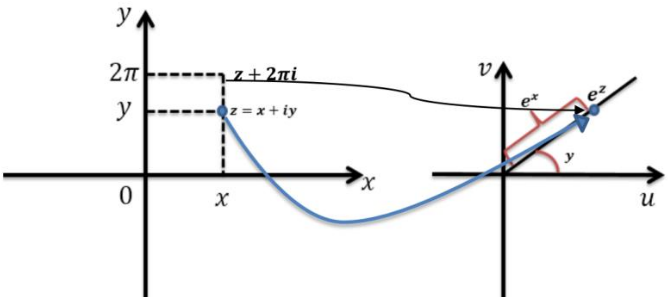
وهي مجموعة حلول المعادلة الأسية (كل قيمة صحيحة لـ k تقابل حلاً للمعادلة المعطاة).

تمثيل التابع الأسي العقدي:

إنّ التابع الأسي العقدي

$$f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y = u(x,y) + iv(x,y)$$

معرّف على $\mathbb{C}$ والتي تماثل $\mathbb{R}^2$، أي أنّ كل قيمة من المنطلق تتعيّن بثنائية (x,y)، من جهةٍ أخرى، إنّ مستقر هذا التابع هو أيضاً $\mathbb{C}$، والتي تماثل $\mathbb{R}^2$، وبالتالي كل قيمة للتابع تتعيّن بثنائية (u,v)، وبالتالي حتى نتمكن من تمثيل التابع الأسي نحن بحاجة لمستويين الأول للمنطلق وليكن oxy، والآخر للمستقر وليكن ouv :



- بما أنّ طويلة عدد عقدي هندسياً هي بُعد ذلك العدد عن المبدأ، فإنّ e^z سيبعد عن مبدأ المستوي ouv بمقدار e^x.
- بما أنّ أحد قياسات زاوية e^z يساوي y فإنَّ e^z سيقع على نصف المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها y مع ou (في المستوي المستقر).
- فعلياً، تم تعيين موضع e^z قطبياً بمعرفة r, θ.
- إنَّ صورة العدد $z + 2\pi i$ وفق التابع e^z هي نفسها صورة z وفق هذا التابع لأن e^z تابع دوري دوره $2\pi i$. هندسياً: نحصل على العدد $z + 2\pi i$ بالانتقال شاقولياً بمسافة تساوي 2π). انظر الرسم وهي e^z أعلاه.
- مما سبق نجد أنه إذا عرفنا صورة قطعة مستقيمة طولها 2π محمولة على مستقيمٍ شاقولي معادلته $x = x_0$، فهذا يقتضي معرفتنا لصورة كامل المستقيم $x = x_0$.
- إذا جعلنا x_0 تمسح المجال $]-\infty, +\infty[$ فإن صورة القطعة المستقيمة المذكورة أعلاه ستمسح صورة شريط أفقي[1] عرضه يساوي 2π (طول القطعة المستقيمة). وإنّ معرفتنا لصور الشريط السابق هي صورة كامل المستوي المنطلق.

تمرين:

عيّن صورة القطعة المستقيمة التالية وفق التابع الأسي العقدي:

$$D = \{z = x_0 + iy : \ -\pi < y \leq \pi\}$$

[1] غالباً نأخذ الشريط الأفقي الممثّل بالمتراجحة $-\pi < Im\,(z) \leq \pi$.

الحل: لتكن $z \in D$، عندئذٍ $z = x_0 + iy$، و $-\pi < y \leq \pi$، وبالتالي يكون:

$$|e^z| = e^{x_0}$$

وعندما تمسح z القطعة المستقيمة D فإنّ y (التي تمثّل الزاوية بين e^z كشعاع و ou^+ في المستوي المستقر) تمسح المجال $]-\pi, \pi]$، وهذا يعني أنّ المعادلة القطبية لصورة D هي:

$$r = e^{x_0} \;\; : \;\; -\pi < \theta \leq \pi$$

أي أنّ الصورة هي دائرة في المستوي ouv نصف قطرها e^{x_0} ومركزها المبدأ.

ملاحظة:

إذا كانت القطعة محمولة على oy " يعني أنّ $x_0 = 0$"، فإنّ $r = e^{x_0} = e^0 = 1$

وعليه تكون صورة القطعة المستقيمة هي دائرة الوحدة.

...انتهت المحاضرة الثالثة...